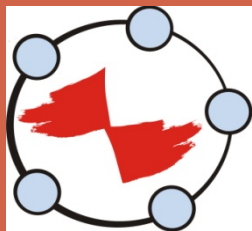




II JORNADA GEOGEBRA DE CASTILLA Y LEÓN

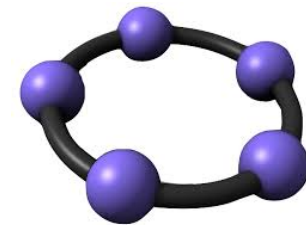


Instituto GeoGebra de
Castilla y León. IGCL



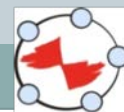
GeoGebra 3D

POLIEDROS REGULARES

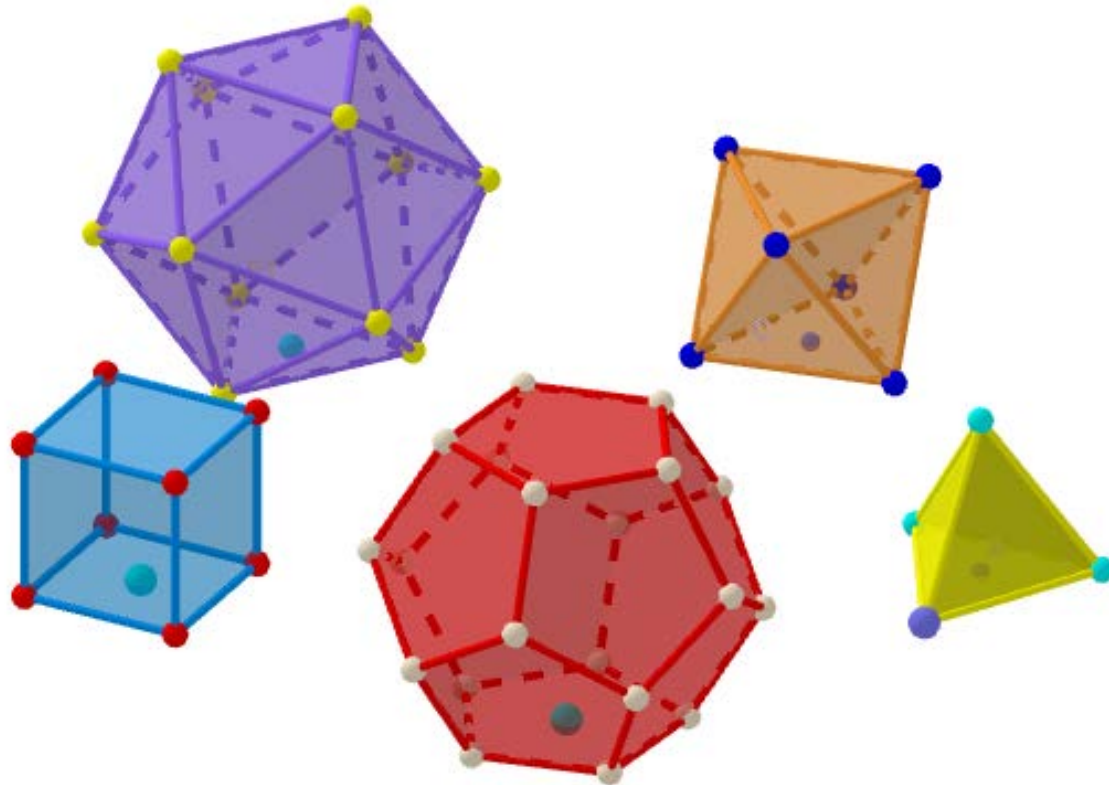


Ávila, 16 de Abril de 2016

Jose Manuel Arranz. Instituto GeoGebra de Castilla y León



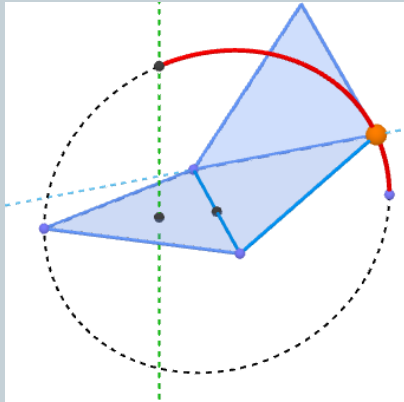
Cinco poliedros regulares convexos



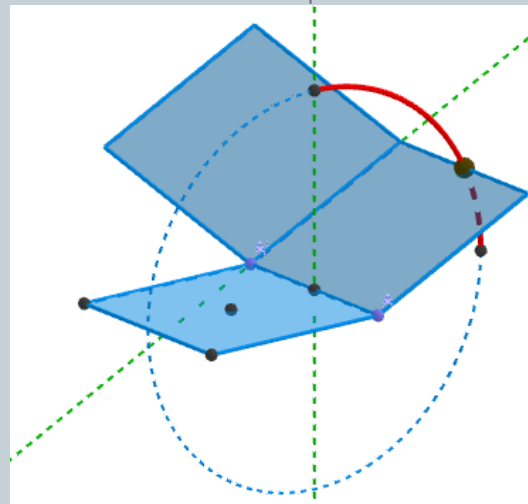
Se pueden construir con GeoGebra “con regla y compás”



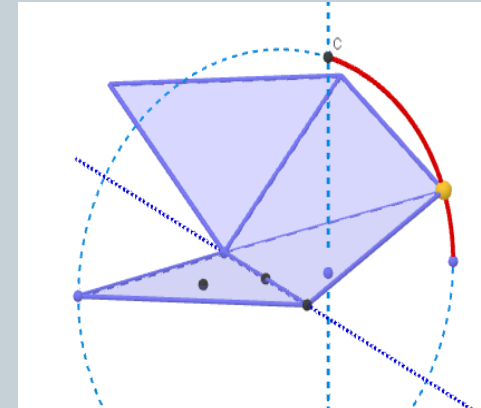
- **Tetraedro**



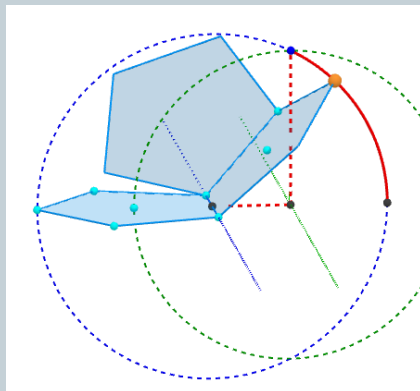
- **Cubo**



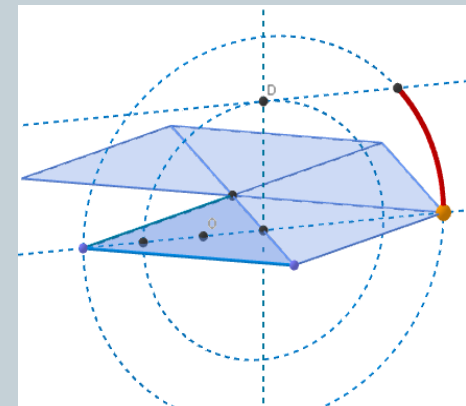
- **Octaedro**



- **Dodecaedro**



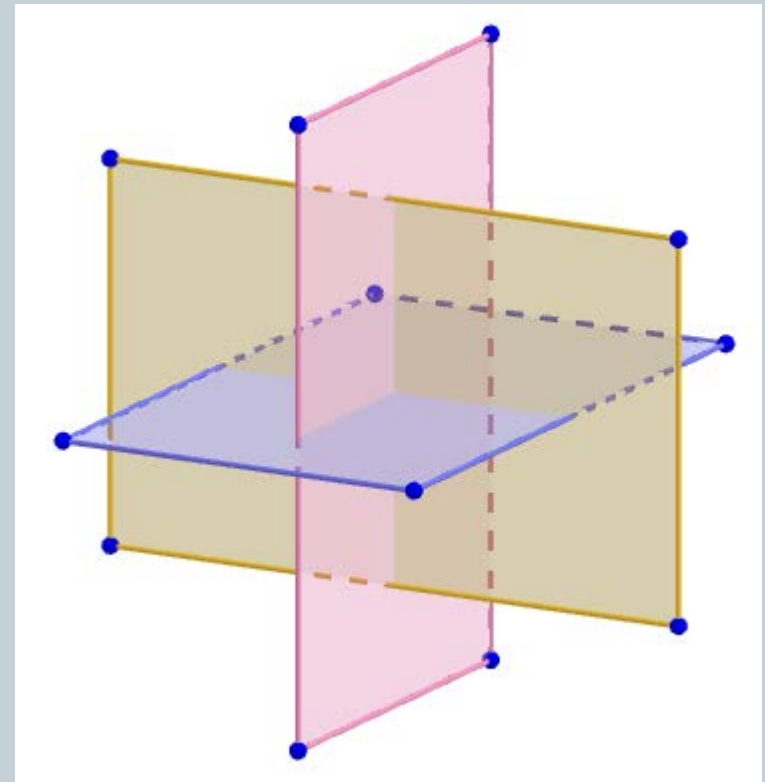
- **Icosaedro**



Icosaedro y número de oro



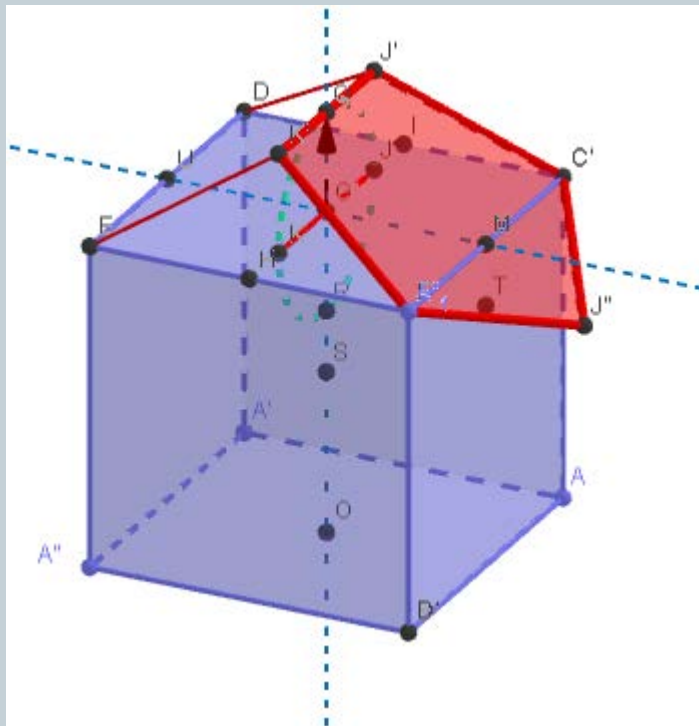
- Puede construirse el icosaedro a partir de tres rectángulos áureos perpendiculares.
- Basta introducir coordenadas (a, b, c)
- $a=0, b=\pm 1, c=\pm \varphi$
- La construcción del icosaedro es un sencillo problema de combinatoria.
- Vértices = $4 \cdot 3 = 12$
- Aristas = $(12 \cdot 5) / 2 = 30$
- Caras = $(12 \cdot 5) / 3 = 20$



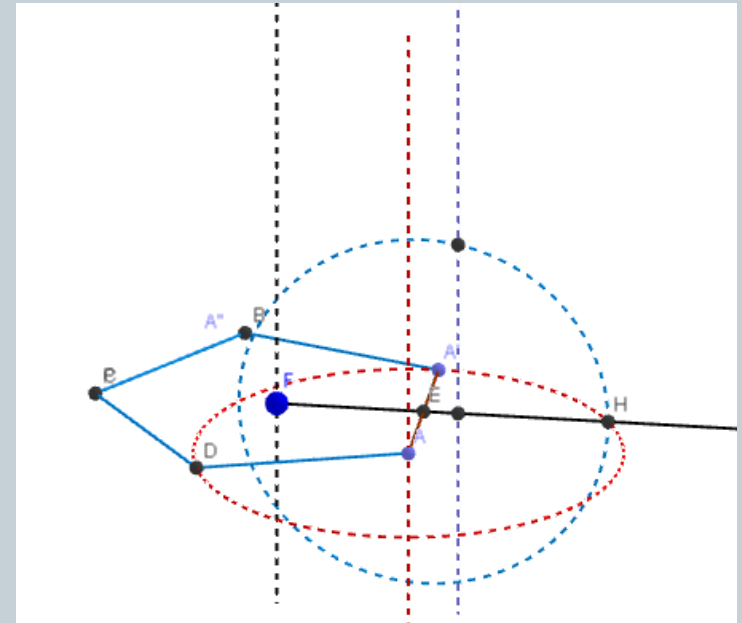
Otras construcciones



- Dodecaedro a partir del cubo.



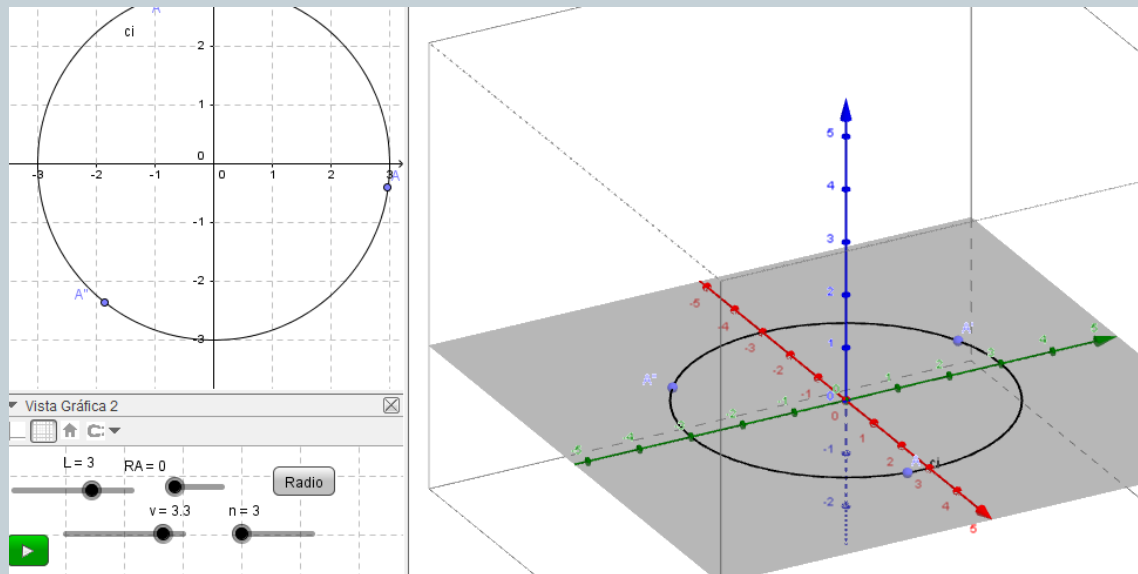
- Icosaedro desde un pentágono regular.



Construcción con GeoGebra



- Vista Gráfica 3D, otras vistas
- Conviene crear una plantilla que agilice el trabajo
- Crear el poliedro centrado sobre ejes, facilita rotaciones,...



Áreas y volúmenes



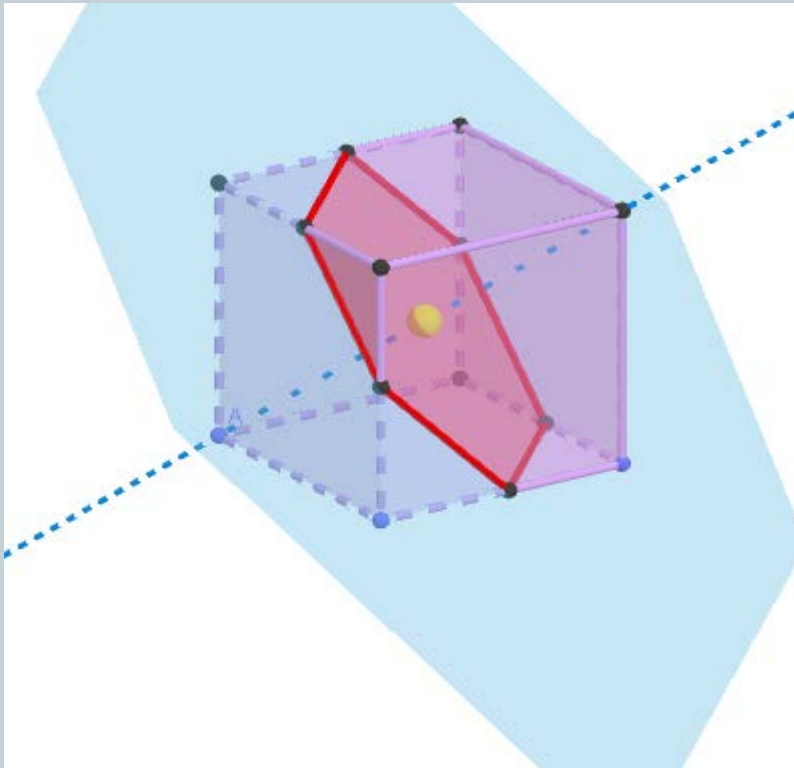
		Volumen		Área	
Tetraedro	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \approx 0.12 a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{4} r^3 \approx 0.61 r^3$	$\sqrt{3} a^2 \approx 1.73 a^2$	$3 \sqrt{3} r^2 \approx 5.2 r^2$
Cubo	$r = \frac{\sqrt{2}}{2} a$	a^3	$2 \sqrt{2} r^3$	$6 a^2$	$12 r^2$
Octaedro	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \approx 0.47 a^3$	$\sqrt{6} r^3 \approx 2.45 r^3$	$2 \sqrt{3} r^2 \approx 3.46 a^2$	$6 \sqrt{3} r^2 \approx 10.39 r^2$
Dodecaedro	$r = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} a$	$\frac{15 + 7 \sqrt{5}}{4} a^3 \approx 7.66 a^3$	$\approx 12.45 r^3$	$\approx 1.72 a^2$	$\approx 2.38 r^2$
Icosaedro	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$	$\frac{15 + 5 \sqrt{5}}{12} a^3 \approx 2.18 a^3$	$\approx 11.34 r^3$	$5 \sqrt{3} a^2 \approx 8.66 a^2$	$15 \sqrt{3} r^2 \approx 25.98 r^2$

Expresiones calculadas con GeoGebra sin utilizar CAS.

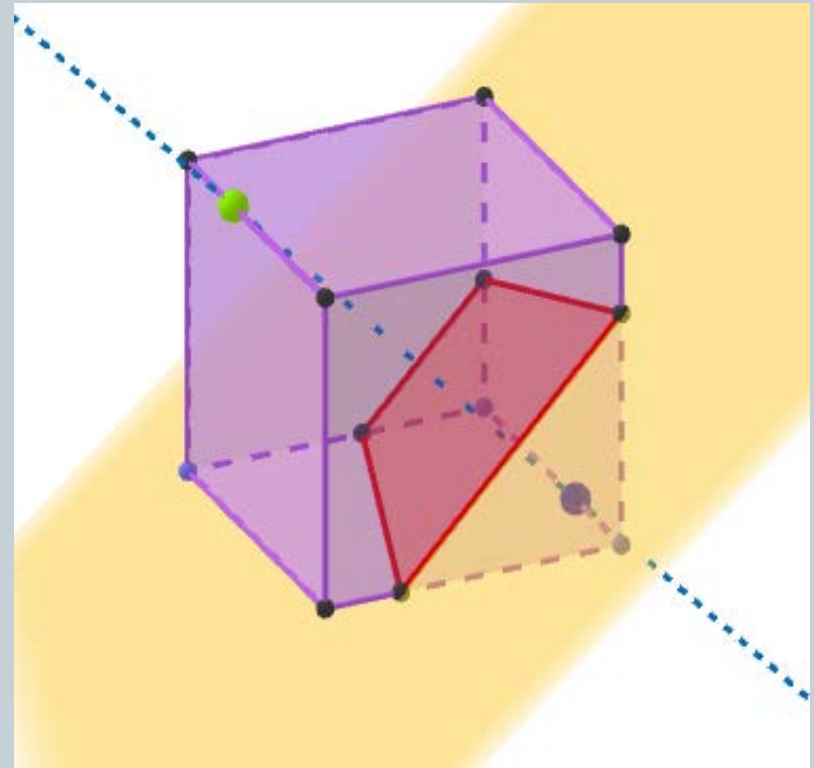
Cortes por un plano



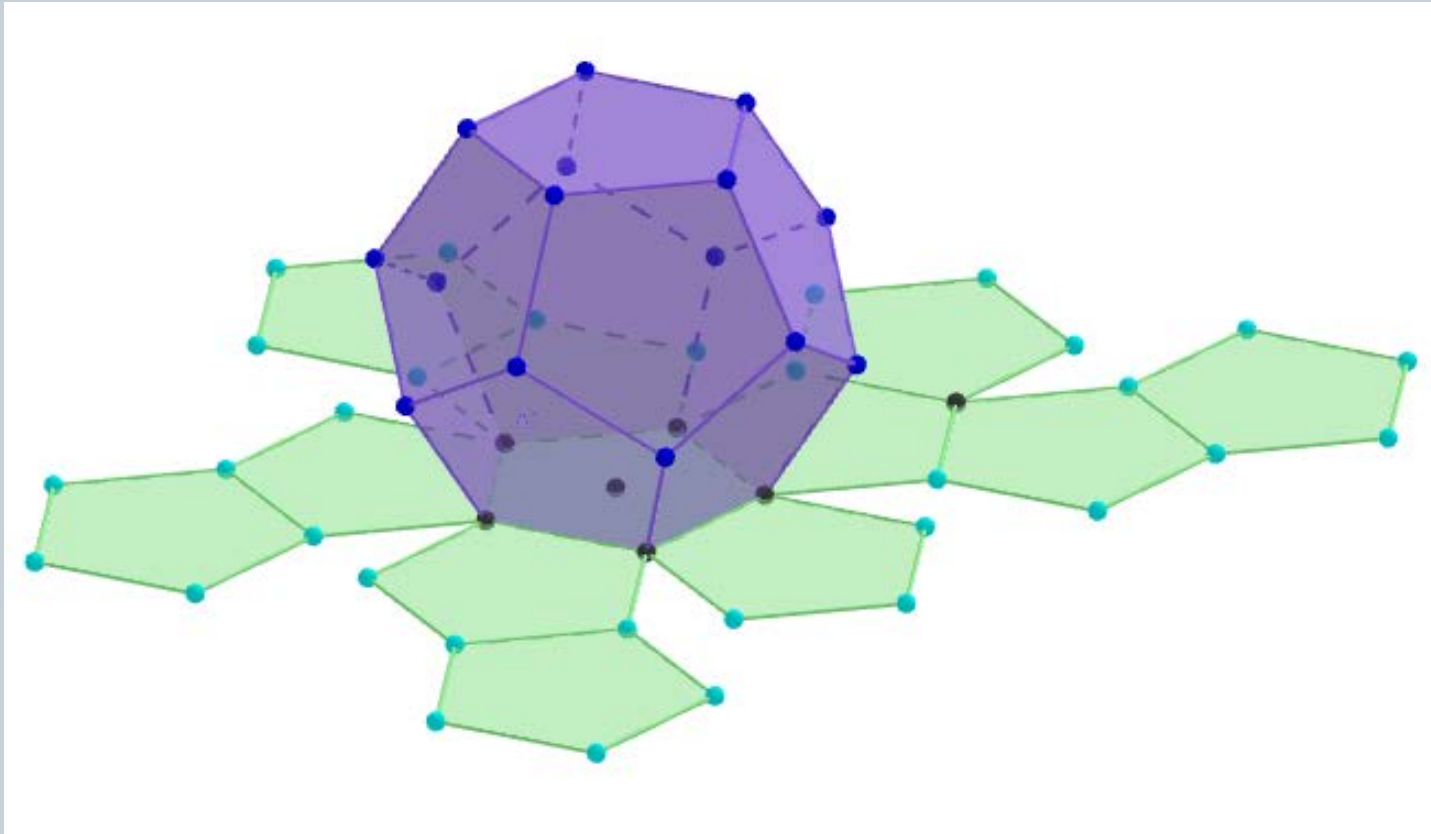
**Plano perpendicular a recta
por vértices opuestos.**



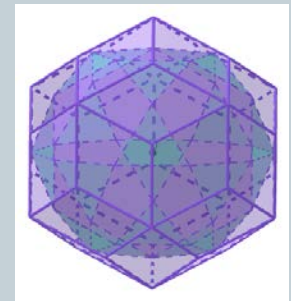
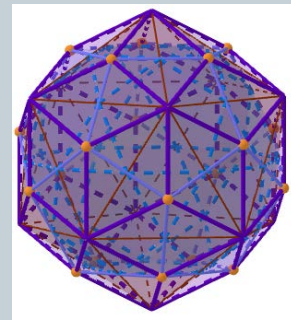
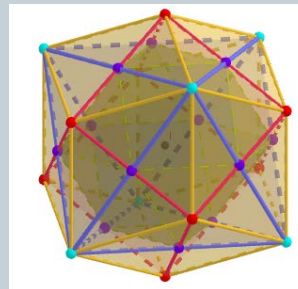
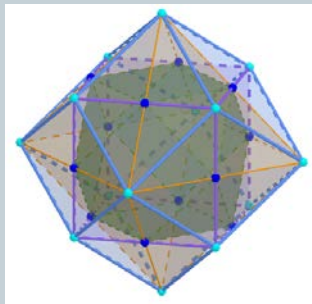
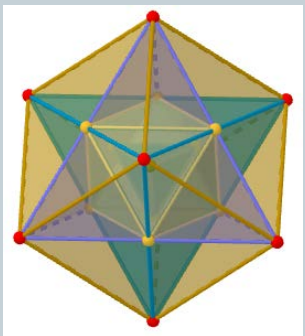
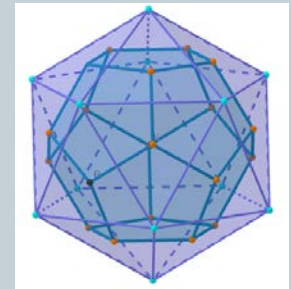
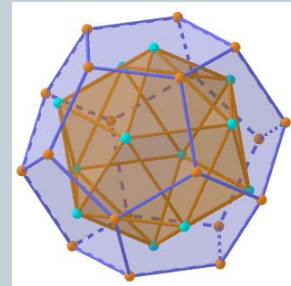
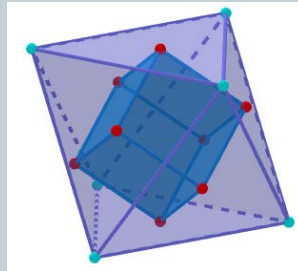
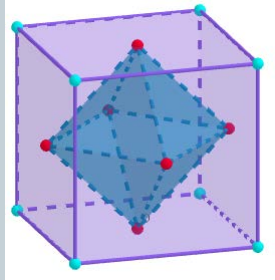
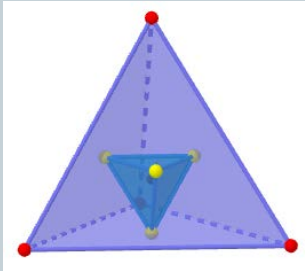
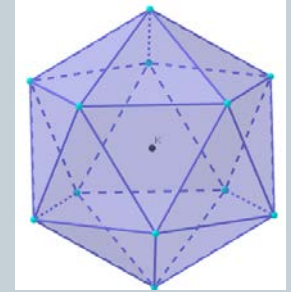
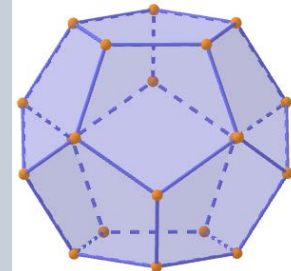
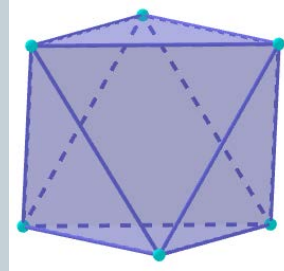
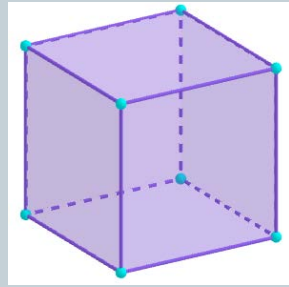
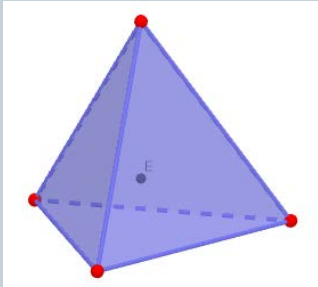
**Plano perpendicular a
puntos sobre aristas o caras.**



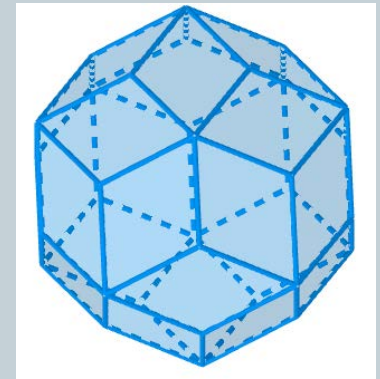
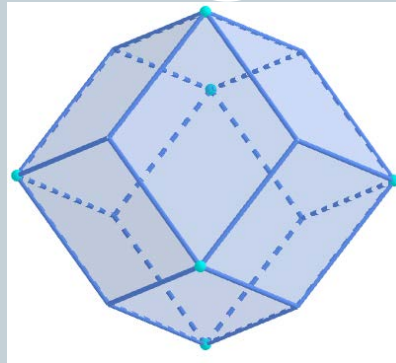
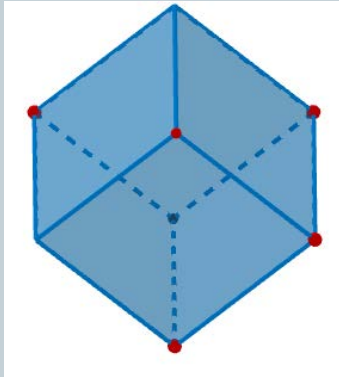
Desarrollos planos de poliedros



Dualidad



Poliedro envolvente duales encajados

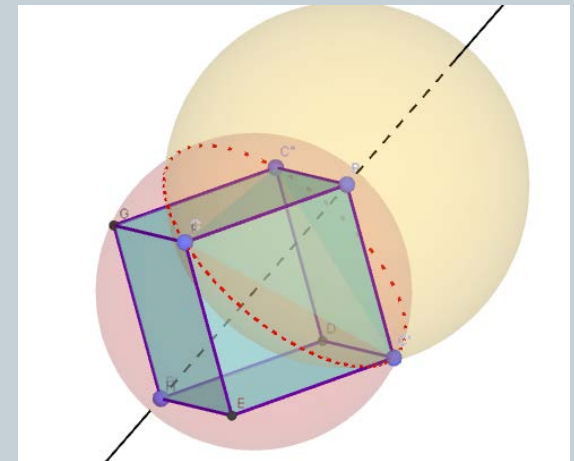
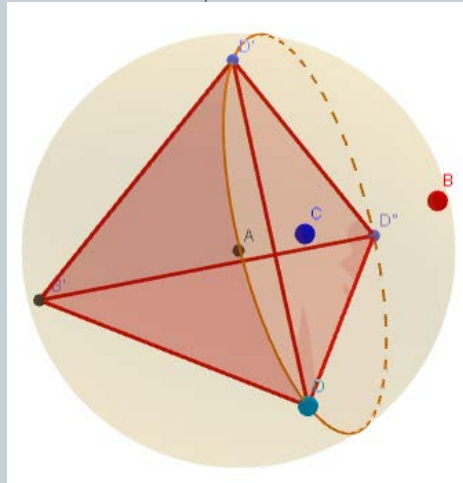
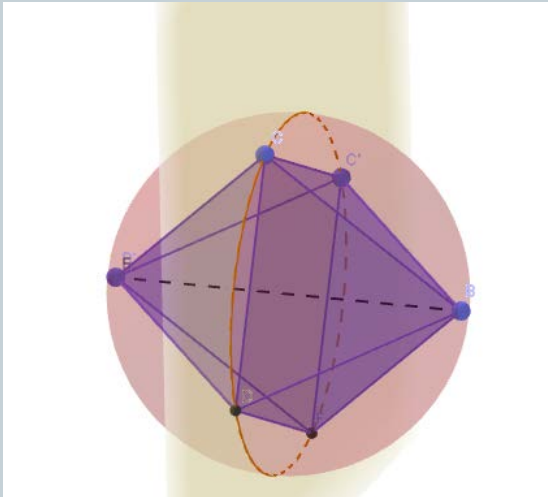


Tetraedro-Tetraedro	Cubo-Octaedro	Dodecaedro-Icosaedro
Cubo	Dodecaedro rómbico	Tiacontaedro rómbico
Número de caras		
$4+4-2=6$	$6+8-2=12$	$12+20-2=30$
Relación longitud diagonales		
1	$\sqrt{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Poliedros inscritos en la esfera



- Octaedro inscrito
- Tetraedro inscrito
- Cubo inscrito



Pueden inscribirse los cinco poliedros, dodecaedro e icosaedro algo más laborioso.

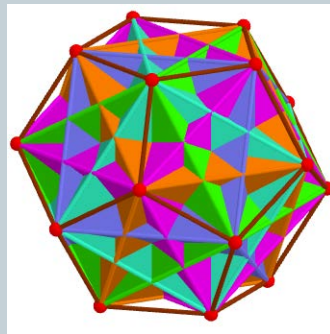
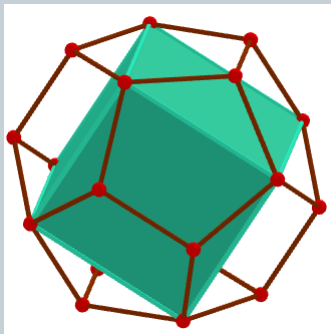
Dado el poliedro determinar la esfera circunscrita es evidente

Inscribir unos poliedros en otros



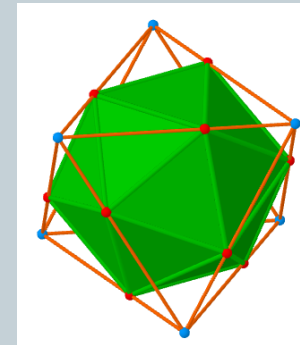
- Si entendemos inscritos como vértices en vértices, centro de cara o centro de arista, hay doce posibilidades.

- ✧ Cubo inscrito en dodecaedro.
- ✧ Rotación (cinco cubos en dodecaedro)



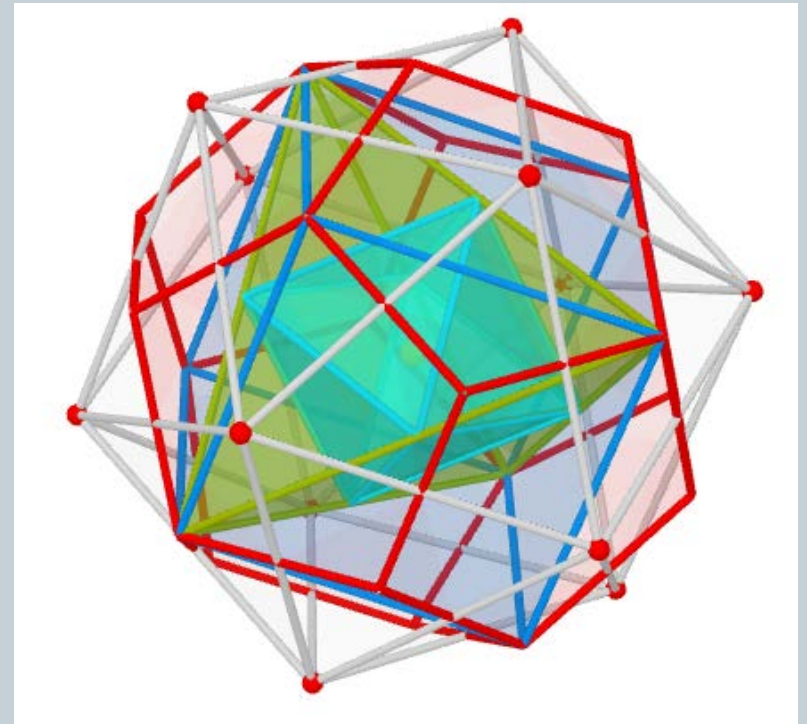
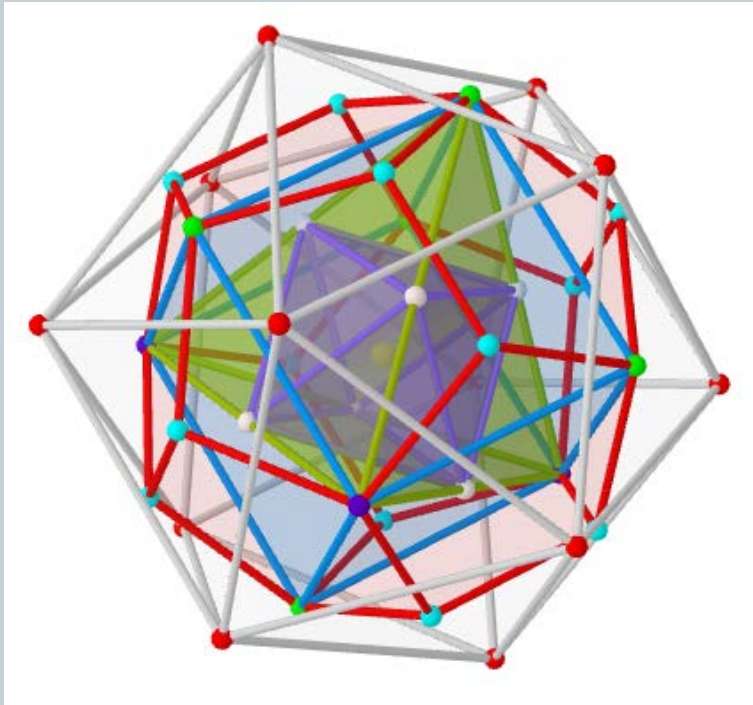
- Extendiendo la definición, cada uno de los poliedros regulares puede inscribirse en los otros cuatro. Veinte posibilidades.

- ✧ Icosaedro inscrito en octaedro.

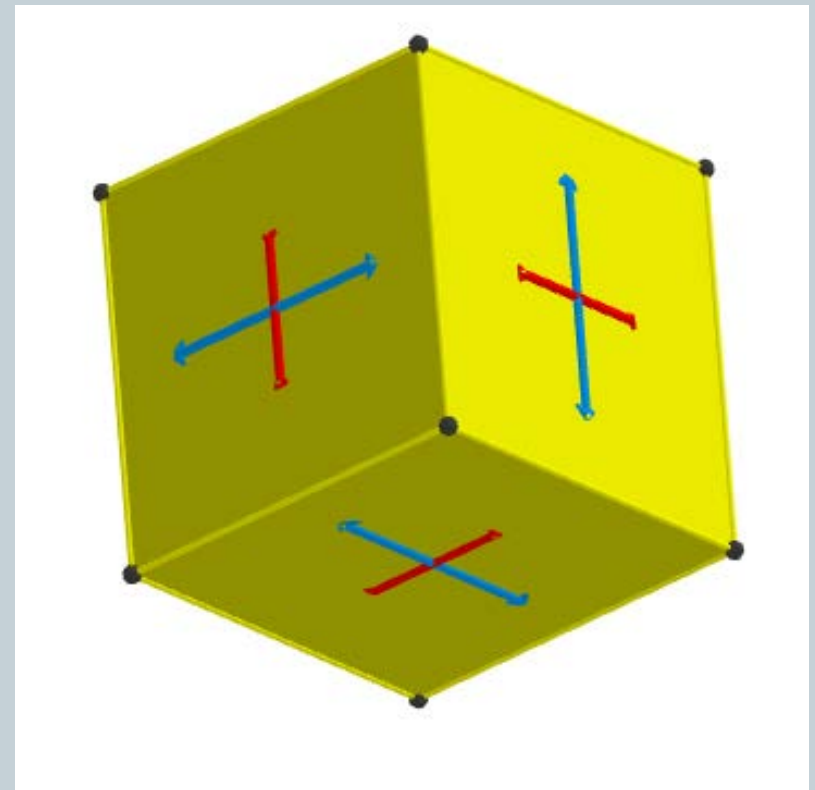
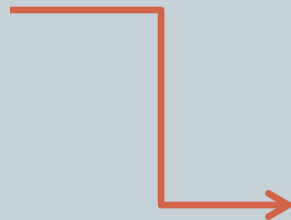
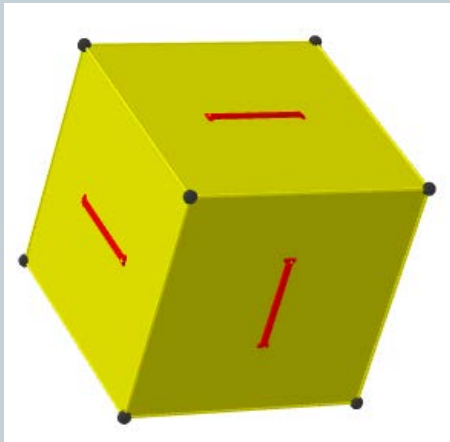
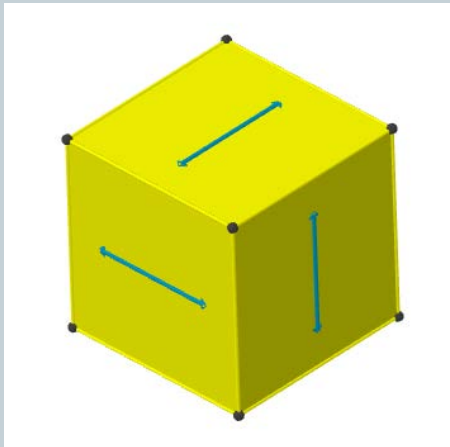


Resulta paradójico que Luca Pacioli no contemple como inscritos los casos que requieren la utilización del número de oro en la Divina Proporción.

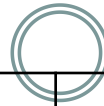
Omnipoliedro(s)



El poliedro oculto



Truncamiento de poliedros regulares



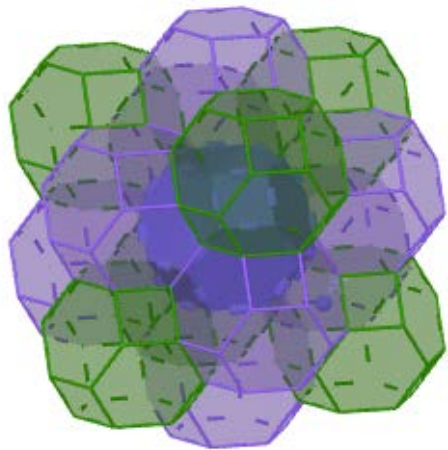
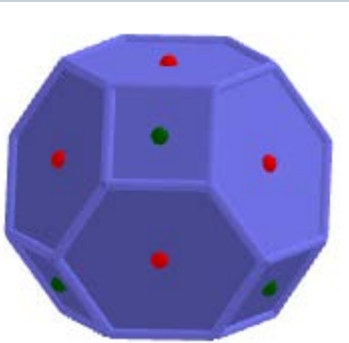
	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
	Octaedro	Cuboctaedro		Icosidodecaedro	
Corte Tipo I					
1 / 2 arista					
	Tetraedro Truncado	Cubo Truncado	Octaedro Truncado	Dodecaedro Truncado	Icosaedro Truncado
Corte Tipo II					
	1/3	$\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$	1/3	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$	1/3

Se obtienen siete poliedros semirregulares de los trece posibles

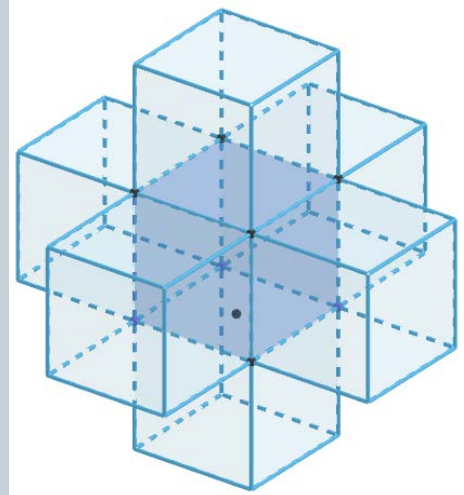
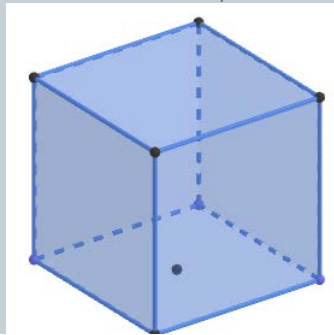
Poliedros que rellenan el espacio



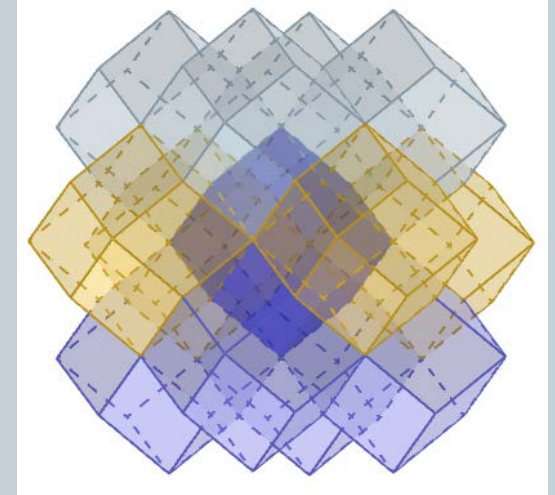
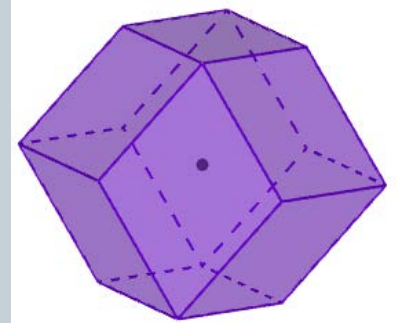
- Octaedro truncado (sólido de Kelvin)



- Cubo



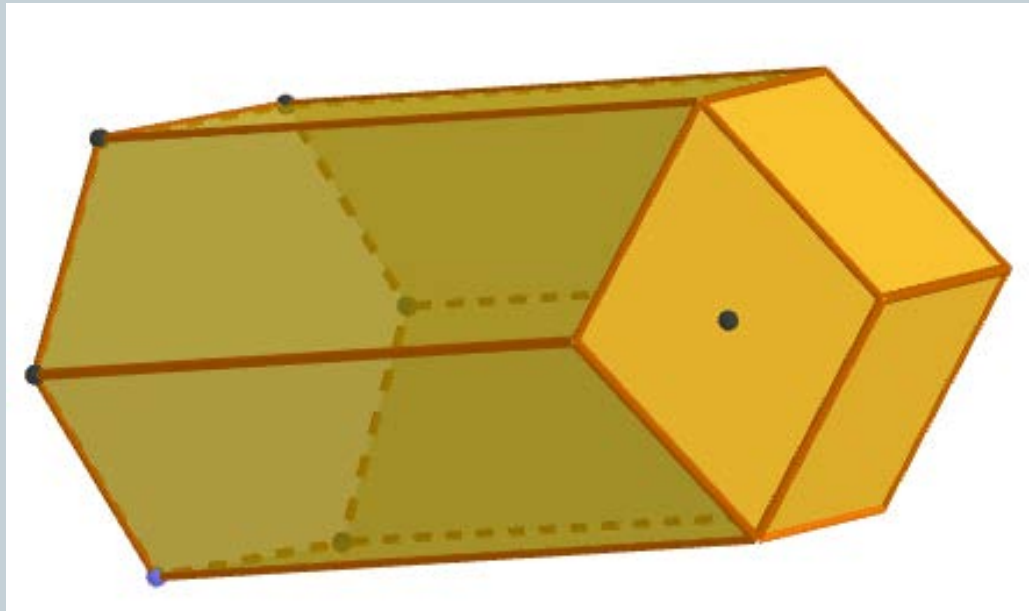
- Dodecaedro rómbico



Un panal de rica miel con GeoGebra



- Se construye a partir del dodecaedro rómbico
- Se demuestra que es superficie “casi mínima”

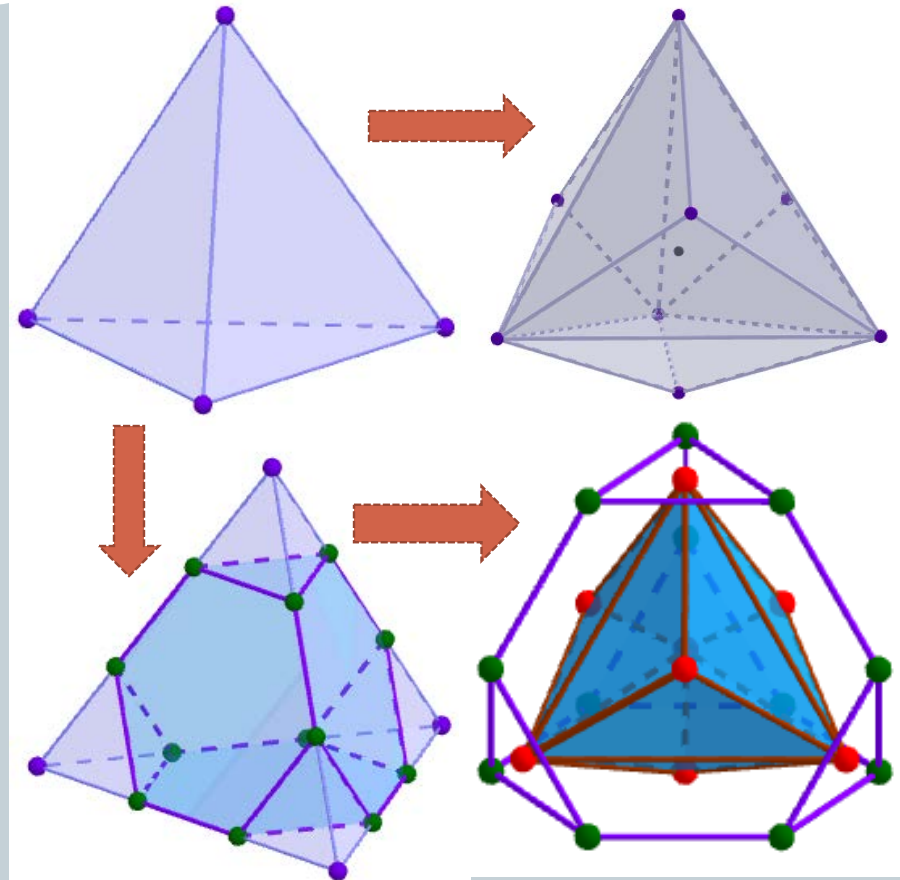


- ¿Utilizan GeoGebra las abejas?

Sólidos de Catalan



- Nombrados así por el matemático belga Eugène Charles Catalan.
- Duales de los poliedros arquimedianos.
- Poliedros convexos de caras uniformes pero no regulares.
- Ángulos diédricos iguales pero no uniformes.
- Se muestra el más simple de los sólidos de Catalan, el triaquistetraedro.



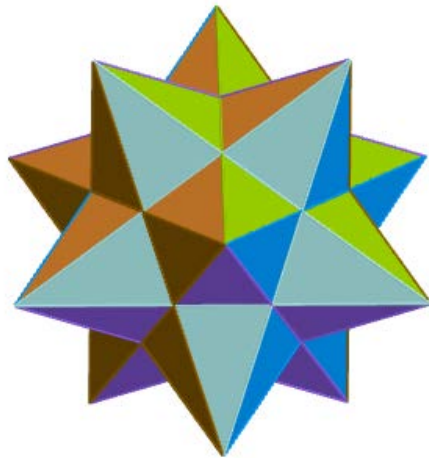
Poliedros regulares estrellados

Sólidos de Kepler-Poinsot



Pequeño
Dodecaedro
Estrellado.

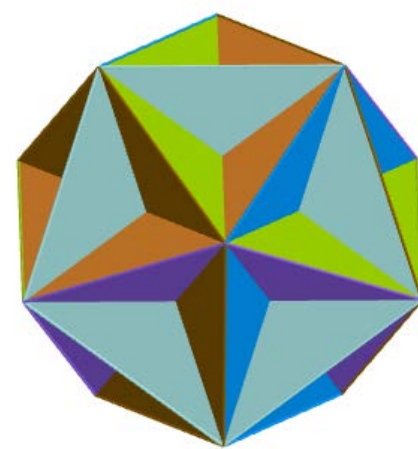
$$\left\{ \frac{5}{2}, 5 \right\}$$



Duales

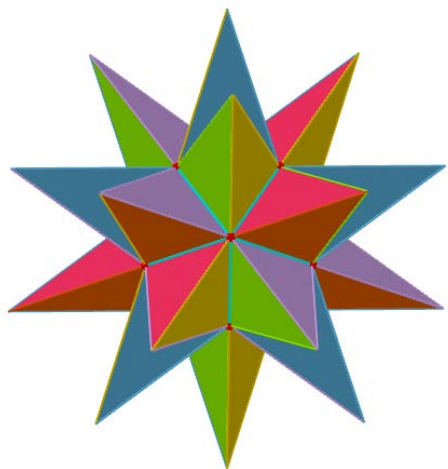
Gran
Dodecaedro.

$$\left\{ 5, \frac{5}{2} \right\}$$



Gran
Dodecaedro
Estrellado.

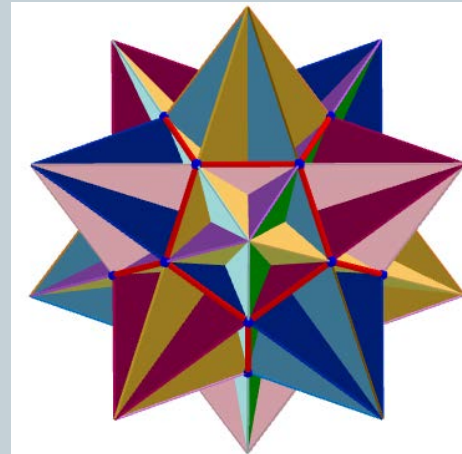
$$\left\{ \frac{5}{2}, 3 \right\}$$



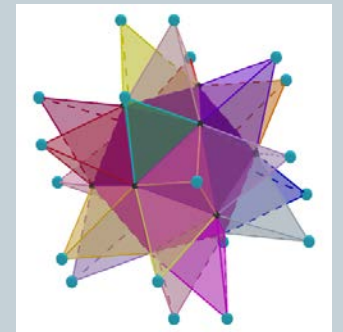
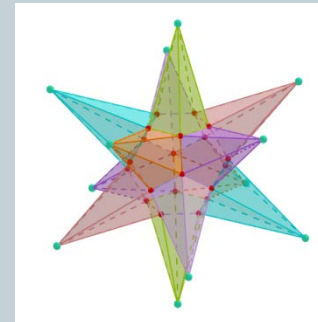
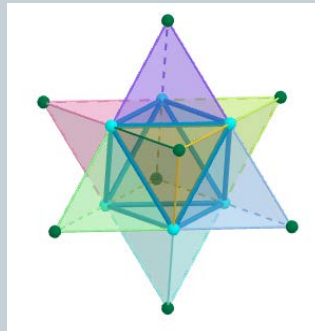
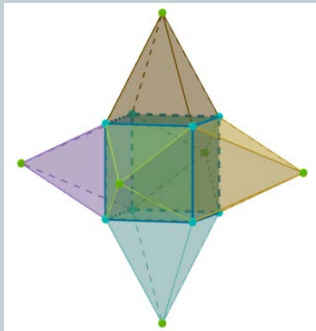
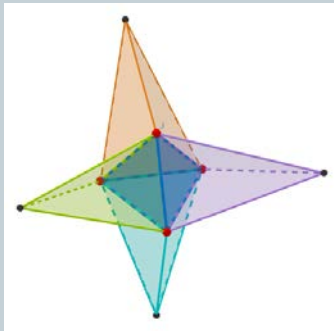
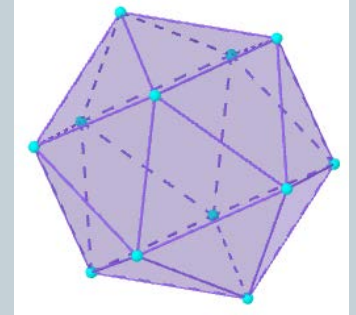
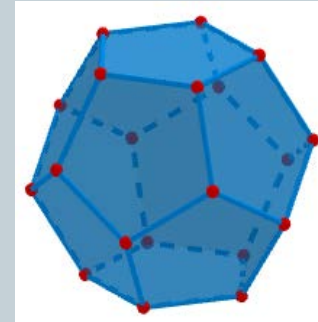
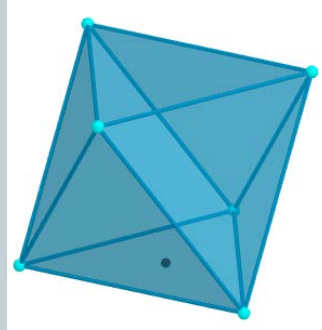
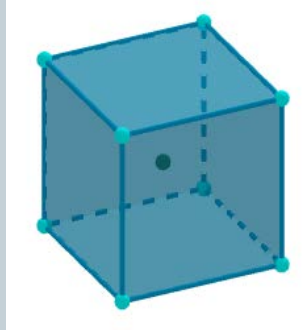
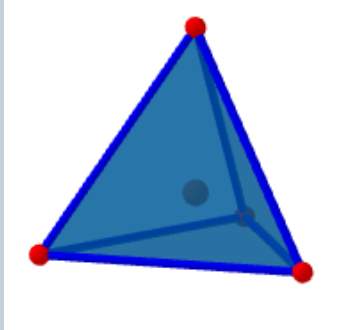
Duales


Gran
Icosaedro

$$\left\{ 3, \frac{5}{2} \right\}$$



Estelaciones de poliedros regulares





El estudio de los poliedros regulares y
sus conexiones no termina aquí,
mas bien comienza.

Explorad con vuestros alumnos
el mundo de los poliedros.

Con **GeoGebra** es fácil y divertido.

Descubrirán su belleza.

Una cara más de la belleza de
Las Matemáticas.



A la divina proporción

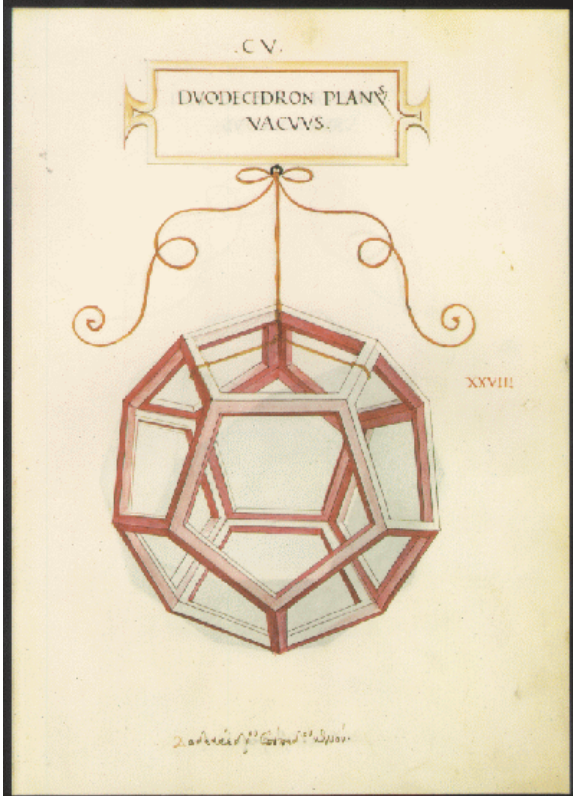
A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera trasparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti





Jose Manuel Arranz
josemarranz@gmail.com